SÉRIES PSI-PC

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

"L'usage de la calculatrice est interdit". ***Vendredi 9 mai 1997 de 8h à 12h***

L'objet de ce problème est d'étudier certaines propriétés de la fonction g définie sur $[-1.+\infty[$ par

$$g(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}\,dt.$$

Partie I : Calcul préliminaire

1) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$, impaire, 2π-périodique et telle que :

$$\forall x \in [0.\pi] \quad h(x) = x(\pi - x).$$

a) Tracer le graphe de h sur $[-\pi.\pi]$.

b) Déterminer la série de Fourier réelle de h.

c) Étudier la convergence (simple et uniforme) de la série de Fourier de h sur $\mathbb{R}$ et préciser sa somme.

d) En déduire la somme $T = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

2)

a) Montrer que, pour tout n de N, la fonction : $t \mapsto t^n(lnt)^2$ est intégrable sur $]0.1]$ et calculer son intégrale $u_n = \int_0^1 t^n(lnt)^2\,dt$ en fonction de n.

b) Montrer que la fonction : $t \mapsto \frac{(lnt)^2}{1+t^2}$ est intégrable sur $]0.+\infty[$ et que, si l'on note $I = \int_0^{+\infty} \frac{(lnt)^2}{1+t^2}\,dt$, alors : $I = 2\int_0^1 \frac{(lnt)^2}{1+t^2}\,dt$.

c) Montrer :

$$\int_0^1 \frac{(lnt)^2}{1+t^2}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_{2n}.$$

et en déduire la valeur de I.

Partie II :

1) Soit

$$f :]-1,+\infty[\to \mathbb{R}$$

$$t \mapsto \begin{cases} \frac{\ln(1+t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

a) Montrer que f est de classe C^∞ sur $]-1,+\infty[$ et calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout n.

b) Étudier l'intégrabilité de f sur $]-1.0]$ et sur $[0.+\infty[$.

2)

a) Vérifier que g est définie sur $[-1.+\infty[$ (g étant la fonction citée dans le préambule).

b) Montrer que g est dérivable sur $]0.+\infty[$ et préciser sa dérivée.

c) Montrer que la fonction : $x \mapsto g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}(\ln x)^2$ est constante sur $]0.+\infty[$ et préciser sa valeur en fonction de $g(1)$.

d) En déduire un équivalent simple de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

3) Montrer que, pour tout x de $]-1.1[$. $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n^2}$. et que cette égalité est encore vraie pour $x = 1$ et $x = -1$.

4) En déduire un réel δ tel que $g(-1) = \delta g(1)$.

Partie III : Calcul de $g(1)$

1) Montrer :

$$\forall t \in]0.1[\quad 0 \leq \ln(1+t) \leq -\ln(1-t)$$

et en déduire :

$$\forall \theta \in [0.\pi] \; \forall t \in]0.1[\quad \left|\ln(t^2 + 2t\cos\theta + 1)\right| \leq 2\left|\ln(1-t)\right|.$$

2) Montrer que, pour tout θ de $[0.\pi]$. la fonction : $t \mapsto \dfrac{\ln(t^2+2t\cos\theta+1)}{t}$ est intégrable sur $]0.1[$. On pose alors :

$$\forall \theta \in [0,\pi] \quad \psi(\theta) = \int_0^1 \frac{\ln(t^2+2t\cos\theta+1)}{t}\,dt.$$

Exprimer $\psi(0)$ et $\psi(\pi)$ en fonction de $g(1)$ et de $g(-1)$.

3) Montrer que ψ est continue sur $[0,\pi]$.

4) Montrer que ψ est de classe C^1 sur $]0,\pi[$ et que, pour tout θ de $]0,\pi[$, $\psi'(\theta) = -\theta$.

5) Déduire de ce qui précède l'expression de ψ sur $[0,\pi]$.

6) Calculer $g(1)$. (On pourra utiliser le résultat du II.4.).

Partie IV :

On note E l'ensemble des fonctions u continues sur $]0.+\infty[$. à valeurs réelles. telles que la fonction : $t \mapsto \dfrac{u(t)^2}{1+t^2}$ est intégrable sur $]0.+\infty[$.

1)

a) Montrer que. pour tout $(u.v)$ de E^2. la fonction : $t \mapsto \dfrac{u(t)v(t)}{1+t^2}$ est intégrable sur $]0.+\infty[$.

b) Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

c) On pose, pour tout (u,v) de E^2. $< u.v >= \int_0^{+\infty} \dfrac{u(t)v(t)}{1+t^2}\,dt$. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

Dans toute la suite E sera muni de ce produit scalaire.

2) Pour tout k de N, on définit la fonction h_k par : $\forall t \in]0,+\infty[\quad h_k(t) = (\ln t)^k$.

a) Montrer que, pour tout k de N, la fonction : $t \mapsto \dfrac{h_k(t)}{1+t^2}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

b) En déduire que g est un élément de E et que la fonction : $t \mapsto \dfrac{g(t)}{1+t^2}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$. (On pourra utiliser le résultat du II.2.d).

c) Montrer que, pour tout k de N, h_k est un élément de E et que, si j et k sont deux entiers avec $j+k$ impair, alors $< h_j, h_k >= 0$.

Dans la suite, on note, pour tout n de N, *E_n le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs $h_0, \ldots, h_n$.*

3) Calculer, pour tout n de N, la dimension de E_n.

4) Si u est un élément de E, montrer que la fonction : $t \mapsto u\left(\dfrac{1}{t}\right)$ est encore un élément de E.

5) On définit alors l'endomorphisme φ de E qui, à tout élément u de E, associe la fonction $\varphi(u)$ définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\varphi(u)(t) = \frac{1}{2}\left(u(t) + u\left(\frac{1}{t}\right)\right).$$

a) Déterminer, pour tout k de N, $\varphi(h_k)$ et en déduire que $\varphi\left(g - g(1)h_0 - \dfrac{h_2}{4}\right) = 0$.

b) Soit $n \in$ N. Montrer que E_n est stable par φ.
On note alors φ_n l'endomorphisme de E_n induit par φ.
Montrer que φ_n est un projecteur de E_n, déterminer une base de son noyau et une base de son image et en déduire que φ_n est un projecteur orthogonal.

c) Établir :

$$\forall (u,v) \in E^2 \quad < \varphi(u), v >=< u, \varphi(v) > .$$

d) En déduire $< h_0, g - g(1)h_0 - \dfrac{h_2}{4} >= 0$ et déterminer alors la valeur de l'intégrale

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{g(t)}{1+t^2}\,dt.$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail